Maths XP DM $n°1$ Novembre 2024 Mme Vermeulen G. et M. Thiaude P.
À faire par groupe de 2 élèves, une seule copie.

Exercice 1

Déterminer le plus petit entier naturel non nul d tel que : $2025^d \equiv 1\ [7]$.
En déduire le reste modulo 7 de 2025^{1234}.

Exercice 2

Préambule
On cherche à déterminer pour quels $n \in [\![2000 ; 2024]\!]$ on a :

$$5 | 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} - 3$$

On propose deux méthodes qui doivent être traitées, indépendamment.

Première méthode Étude mathématique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} - 3$.

1. Montrer que, pour tous n et k entiers naturels, on a : $u_{n+4k} \equiv u_n\ [5]$.

2. Déterminer les restes modulo 5 de u_0, u_1, u_2 et u_3.

3. Répondre à la problématique du préambule.

Deuxième méthode Utilisation d'un programme Python

Écrire un programme Python permettant de répondre à la problématique du préambule, faire tourner ce programme puis conclure.

Exercice 3 Un classique

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$.
Démontrer par récurrence que : pour tout $m \in \mathbb{N}, x - 1 | x^m - 1$.

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$.
a. Justifier que : $a^2 - 1 | a^8 - 1$, et justifier que : $a^3 - 1 | a^{18} - 1$.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et d un diviseur positif de n, montrer que : $a^d - 1 | a^n - 1$.

3. 6 560 est-il un diviseur de $3^{2024} - 1$?

Corrigé Thiaude

Exercice 1

• plus entier naturel non nul d tel que : $2025^d \equiv 1\ [7]$.

La division euclidienne de 2025 par 7 donne $2025 = 289 \times 7 + 2$ donc $2025 \equiv 2\ [7]$.

On a :

$2025 \equiv 2 \not\equiv 1\ [7]$

$2025^2 \equiv 2^2 \equiv 4\ \not\equiv\ [7]$

$2025^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 1\ [7]$

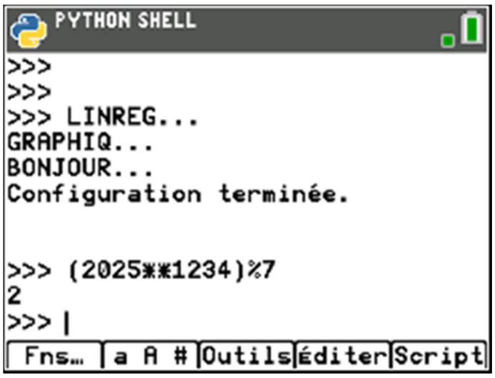
donc le plus petit entier naturel non nul d tel que $2025^d \equiv 1\ [7]$ est : $\boldsymbol{d = 3}$.

• reste modulo 7 de 2025^{1234}.

La division euclidienne de 1 234 par 3 donne : $1234 = 411 \times 3 + 1$.

On a : $2025^{1234} = 2025^{411\times 3+1} = 2025^{411\times 3} \times 2025^1 = (2025^3)^{411} \times 2025 \equiv 1^{411} \times 2 \equiv 2\ [7]$

puis : $2025^{1234}\ \equiv 2\ [7]$ et $0 \leqslant 2 < 7$ donc l**e reste modulo 7 de 2025^{1234} est 2**.



Exercice 2

Préambule **On cherche à déterminer pour quels $n \in [\![2000 ; 2024]\!]$ on a : $5 | 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} - 3$.**

Première méthode **Étude mathématique**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} - 3$.

1. Montrer que, pour tous n et k entiers naturels, on a : $u_{n+4k} \equiv u_n\ [5]$.

Soient n et k deux entiers naturels, on a :

$u_{n+4k} = 2^{n+4k} + 2^{2(n+4k)} + 2^{3(n+4k)} - 3 = 2^{n+4k} + 2^{2n+8k} + 2^{3n+12k} - 3$

$= 2^{4k} \times 2^n + 2^{8k} \times 2^{2n} + 2^{12k} \times 2^{3n} - 3 = (2^4)^k \times 2^n + (2^8)^k \times 2^{2n} + (2^{12})^k \times 2^{3n} - 3$

$= 16^k \times 2^n + 256^k \times 2^{2n} + 4096^k \times 2^{3n} - 3 \equiv 1^k \times 2^n + 1^k \times 2^{2n} + 1^k \times 2^{3n} - 3$

$\equiv 1 \times 2^n + 1 \times 2^{2n} + 1 \times 2^{3n} - 3 \equiv 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} - 3 \equiv u_n\ [5]$

Résumons : $u_{n+4k} \equiv u_n\ [5]$.

Conclusion

Pour tous n et k entiers naturels, on a : $u_{n+4k} \equiv u_n\ [5]$.

2. Déterminer les restes modulo 5 de u_0, u_1, u_2 et u_3.

• $u_0 = 2^0 + 2^{2(0)} + 2^{3(0)} - 3 = 1 + 1 + 1 - 3 = 0 \equiv 0\ [5]$

$u_0 \equiv 0\ [5]$ et $0 \leqslant 0 < 5$ donc **le reste modulo 5 de u_0 est 0**.

• $u_1 = 2^1 + 2^{2(1)} + 2^{3(1)} - 3 = 2 + 4 + 8 - 3 = 11 \equiv 1\ [5]$

$u_1 \equiv 1\ [5]$ et $0 \leqslant 1 < 5$ donc **le reste modulo 5 de u_1 est 1**.

• $u_2 = 2^2 + 2^{2(2)} + 2^{3(2)} - 3 = 2^2 + 2^4 + 2^6 - 3 = 4 + 16 + 64 - 3 = 81 \equiv 1\ [5]$

$u_2 \equiv 1\ [5]$ et $0 \leqslant 1 < 5$ donc **le reste modulo 5 de u_2 est 1**.

• $u_3 = 2^3 + 2^6 + 2^9 - 3 = 8 + 64 + 512 - 3 \equiv 3 + 4 + 2 - 3 \equiv 6 \equiv 1\ [5]$

$u_3 \equiv 1\ [5]$ et $0 \leqslant 1 < 5$ donc **le reste modulo 5 de u_3 est 1**.

3. Répondre à la problématique du préambule.

On procède par disjonction de cas suivant le reste modulo 4 de n :

• $n \equiv 0\ [4]$

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 0 + 4k$, donc : $u_n = u_{0+4k} \equiv u_0 \equiv 0\ [5]$ donc $5|u_n$

• $n \equiv 1\ [4]$

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 1 + 4k$, donc : $u_n = u_{1+4k} \equiv u_1 \equiv 1\ [5]$ donc $non(5|u_n)$

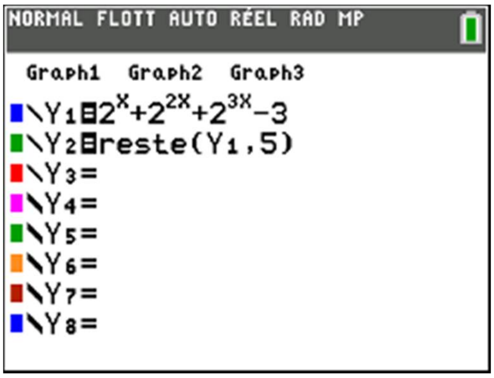
• $n \equiv 2\ [4]$

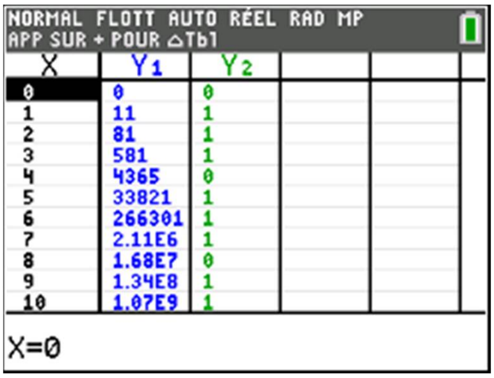
Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2 + 4k$, donc : $u_n = u_{2+4k} \equiv u_2 \equiv 1\ [5]$ donc $non(5|u_n)$

• $n \equiv 3\ [4]$

Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3 + 4k$, donc : $u_n = u_{3+4k} \equiv u_3 \equiv 1\ [5]$ donc $non(5|u_n)$

<u>Résumons</u> : **$5|u_n$ si et seulement si $n \equiv 0\ [4]$**





X	Y1	Y2
0	0	0
1	11	1
2	81	1
3	581	1
4	4365	0
5	33821	1
6	266301	1
7	2.11E6	1
8	1.68E7	0
9	1.34E8	1
10	1.07E9	1

On recherche $n \in [\![2000; 2024]\!]$ tel que $5|u_n$ ce qui revient d'après ce qui précède à déterminer $4k$, $k \in \mathbb{N}$,tel que $4k \in [\![2000; 2024]\!]$.

Or, on a les équivalences :

$4k \in [\![2000; 2024]\!] \Leftrightarrow k \in [\![500; 506]\!] \Leftrightarrow k \in \{500; 501; 502; 503; 504; 505; 506\}$

On obtient alors les valeurs de n cherchées : $4 \times 500 = 2\,000$, $4 \times 501 = 2\,004$, $4 \times 502 = 2\,008$, $4 \times 503 = 2\,012$, $4 \times 504 = 2\,016$, $4 \times 505 = 2\,020$ et enfin $4 \times 506 = 2\,024$.

<u>Conclusion</u>

Les valeurs de n cherchées sont : **$2\,000, 2\,004, 2\,008, 2\,012, 2\,016, 2\,020$ et $2\,024$**.

<u>Deuxième méthode</u> Utilisation d'un programme Python

```
for n in range(2000,2025):
    if (2**n+2**(2*n)+2**(3*n)-3)%5==0:
        print(n,end=" ")
```

Shell

```
>>> %Run 'XP nov 2024 .py'
 2000 2004 2008 2012 2016 2020 2024
```

Les valeurs de n cherchées sont : **$2\,000, 2\,004, 2\,008, 2\,012, 2\,016, 2\,020$ et $2\,024$**.

Exercice 3 **Un classique**

1. **Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$, démontrer par récurrence que : pour tout $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x-1|x^m-1}$.**

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_m : « $x-1|x^m-1$ ».

• initialisation
$x^0-1=1-1=0$, or tout entier relatif divise 0, donc : $x-1|0$ par conséquent $x-1|x^0-1$ autrement dit P_0 est vraie

• hérédité
Supposons P_k : « $x-1|x^k-1$ » pour un certain entier naturel k (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $x-1|x^{k+1}-1$ « est vraie.
On a : $x-1|x^k-1$ (hypothèse de récurrence).
On a : $x-1|x^k-1$ (hypothèse de récurrence) et $x-1|x-1$ donc $x-1$divise tout combinaison linéaire de x^k-1 et $x-1$, en particulier : $x-1|x(x^k-1)+1(x-1)$ c'est-à-dire : $x-1|x^{k+1}-1$, autrement dit P_{k+1} vraie.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, P_m est vraie autrement dit : $\boldsymbol{\forall m \in \mathbb{N}, x-1|x^m-1}$.

2. **Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$.**
   a. **Justifier que $\boldsymbol{a^2-1|a^8-1}$ et que $\boldsymbol{a^3-1|a^{18}-1}$.**
   • en posant $x=a^2$, et $m=4$ on a d'après **1.** : $a^2-1|(a^2)^4-1$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{a^2-1|a^8-1}$.
   • en posant $x=a^3$, et $m=6$ on a d'après **1.** : $a^3-1|(a^3)^6-1$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{a^3-1|a^{18}-1}$.

   b. **Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ et $\boldsymbol{d}$ un diviseur positif de $\boldsymbol{n}$, montrer que : $\boldsymbol{a^d-1|a^n-1}$.**
   $d|n$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n=kd$, or $n>0$ et $d>0$ donc $k>0$.
   On a montré en **1.** que : $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}, x-1|x^m-1$ donc en posant $x=a^d (\in \mathbb{Z})$ et $m=k\ (\in \mathbb{N})$ on obtient : $a^d-1|(a^d)^k-1$, c'est-à-dire : $a^d-1|a^{kd}-1$, or $kd=n$, donc : $a^d-1|a^n-1$.
   On a donc bien, $\boldsymbol{a^d-1|a^n-1}$.

3. **$\boldsymbol{3^{2024}-1}$ est-il divisible par $\boldsymbol{6\,560}$?**

En comparant avec $a^d-1|a^n-1$, $a=3$, $n=2024$, et $6560=a^d-1$ c'est-à-dire $6561=3^d$, or $3^8=6561$, il suffit de vérifier que $8|2024$,
or $2024=8\times 253$ donc $8|2024$, $6\,560=6\,561-1=3^8-1$

On a : $8\times 253=2024$ donc $8|2024$
D'après **2.b.** , pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^8-1|a^{2024}-1$, donc pour $a=3$, on obtient : $3^8-1|3^{2024}-1$, c'est-à-dire : $6561-1|3^{2024}-1$, autrement dit : $\boldsymbol{6560|3^{2024}-1}$.